

JIMT

Vol. 9 No. 1 Juni 2012 (Hal. 16 – 28)



ISSN : 2450 – 766X

PELABELAN TOTAL SISI ANTI AJAIB SUPER (PTSAA) PADA GABUNGAN GRAF BINTANG GANDA DAN LINTASAN

Nurainun¹, S. Musdalifah², I. W. Sudarsana³^{1,2,3}Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako,

Jalan sukarno-Hatta Palu,

¹nununk_nice16@yahoo.co.id, ²selvymusdalifah@yahoo.com, ³sudarsanaiwayan@yahoo.co.id

Abstrak

Pelabelan Total (a, d) sisi anti ajaib (a, d) - TSAA pada graf $G(V, E)$ adalah pemetaan satu-satu $V(G) \cup E(G)$ pada $\{1, 2, \dots, p + q\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot sisi dari semua sisi di G adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (e - 1)d\}$ sama dengan $W \{f(u) + f(uv) + f(v) : uv \in E(G)\}$ untuk suatu bilangan bulat positif $a > 0$ dan $d \geq 0$. Dimana, p = banyaknya titik dan q = banyaknya sisi. Pelabelan λ dikatakan pelabelan total sisi ajaib super (TSAAS) jika mempunyai sifat bahwa setiap titik memperoleh label terkecil, $\lambda(V) = \{1, 2, \dots, p\}$ sebuah graf $G(V, E)$ dikatakan TSAA (TSAAS) jika terdapat pelabelan TSA (TSAAS) pada graf tersebut, berbeda dua. Pada penelitian ini, akan ditunjukkan bahwa gabungan dua graf dari dua graf lintasan dan sebuah graf bintang ganda atau dua graf bintang ganda dan sebuah graf lintasan adalah TSAAS dengan pelabelan $(a, d) = (\frac{9n}{2} + 5, 2)$ untuk $n \geq 4$ genap, $(a, d) = (\frac{9n+3}{2} + 5, 2)$ untuk $n \geq 5$ ganjil, $(a, d) = (\frac{9n}{2} + 6, 2)$ untuk $n \geq 4$ genap, $(a, d) = (\frac{9n+1}{2} + 5, 2)$ untuk $n \geq 4$ ganjil.

Kata Kunci : Bintang Ganda, Lintasan, TSAA, TSAAS

Abstract

Total Labeling (a, d) the anti- magic edge, (a, d) – TSAA in a graph $G(V, E)$ is one to one mapping from $V(G) \cup E(G)$ to $\{1, 2, \dots, p + q\}$, such that the set of weight of all edges in the G is $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (e - 1)d\}$ is equal to $W \{f(u) + f(uv) + f(v) : uv \in E(G)\}$ for a positive integer $a > 0$ and $d \geq 0$. Where p = the member of points and q = the member of side. Labeling of λ is called anti magic total super labeling (TSAAS) if it $\lambda(V) = \{1, 2, \dots, p\}$ a graph $G(V, E)$ is called TSAA (TSAAS) if there TSA labeling (TSAAS) on the graph labeling, unlike the two. In this research, will be shown that the combine of two graphs from two graphs track and a double star graph or two double star graph and a graph track is TSAAS with labeling $(a, d) = (\frac{9n}{2} + 5, 2)$ for $n \geq 4$ even, $(a, d) = (\frac{9n+3}{2} + 5, 2)$ for $n \geq 5$ uneven, $(a, d) = (\frac{9n}{2} + 6, 2)$ for $n \geq 4$ even, $(a, d) = (\frac{9n+1}{2} + 5, 2)$ for $n \geq 4$ uneven.

Keyword : Double Stars, Track, TSAA, TSAAS

I. Pendahuluan

1.1. Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu ilmu yang banyak dimanfaatkan untuk menyelesaikan permasalahan di berbagai bidang. Salah satu cabang ilmu matematika yang sering digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan adalah teori graf.

Walaupun graf telah banyak dipelajari, namun semakin majunya teknologi komputer, telah membangkitkan minat baru untuk mempelajari graf dan menjadikan graf sebagai salah satu cabang matematika yang akhir-akhir ini berkembang pesat. Diantaranya adalah banyaknya penemuan-penemuan baru mengenai graf. Mulai jenis-jenis graf, macam-macam pelabelannya dan cara melabelkannya. Teori graf mulai dikenal pada saat seorang matematikawan berkebangsaan Swiss, bernama Leonhard Euler, berhasil mengungkapkan *Misteri Jembatan Konigsberg* pada tahun 1736. Di Kota Konigsberg (sekarang bernama Kaliningrad, di Uni Soviet) mengalir sebuah sungai bernama sungai Pregel. Di tengah sungai tersebut terdapat dua buah pulau. Dari kedua pulau tersebut terdapat jembatan yang menghubungkan ke tepian sungai dan diantara kedua pulau.

Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek dengan simpul, noktah, bulatan, titik, atau *vertex*, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau *edge*. Salah satu aplikasi yang berkaitan dengan pelabelan graf adalah salah satunya dengan menggunakan sistem kriptografi diantaranya sebagai penguncian pesan.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan cacah yang disebut label. Pertama kali diperkenalkan oleh Sadlack (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970) (dalam Gallian, 2011).

Pelabelan suatu graf adalah suatu pemetaan dari himpunan elemen graf (*vertex*, *edge*, atau *vertex* dan *edge*) terhadap bilangan bulat positif. Pelabelan graf adalah pemberian label pada elemen-elemen tertentu dari graf tersebut dengan menggunakan bilangan bulat positif. Elemen-elemen graf itu sendiri meliputi himpunan titik, himpunan sisi, dan himpunan titik dari sisi.

Pelabelan titik adalah pelabelan graf dimana domainnya merupakan himpunan titik. Pelabelan sisi adalah pelabelan graf dimana domainnya merupakan himpunan sisi, sedangkan pelabelan total adalah pelabelan yang domainnya merupakan gabungan dari himpunan titik dan sisi. Terdapat beberapa jenis pelabelan graf, diantaranya adalah pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan

total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pelabelan ajaib terdapat beberapa macam pelabelan, diantaranya adalah pelabelan total titik ajaib, pelabelan total sisi ajaib, pelabelan total titik ajaib super dan pelabelan total sisi ajaib super, sedangkan pada pelabelan anti ajaib terdapat pelabelan total titik anti ajaib dan pelabelan total sisi anti ajaib. Pada pelabelan total sisi anti ajaib terbagi lagi ada yang super dan ada yang tidak. Dalam hal ini, penelitian ini fokus pada Pelabelan Total Sisi Anti Ajaib Super.

Dalam penelitian sebelumnya sudah ada beberapa peneliti yang telah mengerjakan materi Pelabelan Total Sisi Anti Ajaib Super diantaranya "*Eva Solina, pelabelan total (a,d) -sisi-anti ajaib super pada graf $C_n \cup K_2$* " dan "*Sri Mei Itasari (2011), pelabelan total (a,d) C_4 anti ajaib super pada graf prisma $C_n \times P_2$* " dan masih banyak lagi paper-paper yang terdapat di Gallian (2011).

Dalam penelitian ini yang diangkat adalah gabungan graf bintang ganda dan graf lintasan karena belum ada yang mengerjakannya, ini masih menjadi masalah yang terbuka yang didasari oleh hasil survey dari paper Gallian (2011).

II. Metode Penelitian

2.1. Lokasi dan Tempat Penelitian

Lokasi dan tempat penelitian bertempat di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Tadulako.

2.2. Alat dan Bahan

Adapun alat dan bahan yang digunakan pada penelitian ini adalah sebuah alat tulis menulis dan laptop dengan menggunakan software pemrograman Microsoft Office Visio 2003.

2.3. Jenis dan sumber data

Jenis data yang digunakan pada penelitian ini adalah data kuantitatif yaitu data yang berupa angka. Sedangkan sumber data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder.

2.4. Teknik Analisa Data

Teknik yang digunakan adalah studi literatur, yaitu mengumpulkan informasi dari beberapa buku, artikel dan jurnal yang berkaitan dengan Pelabelan TSAAS.

2.5. Prosedur Penelitian

Penelitian dapat dilakukan sesuai dengan prosedur dibawah ini :

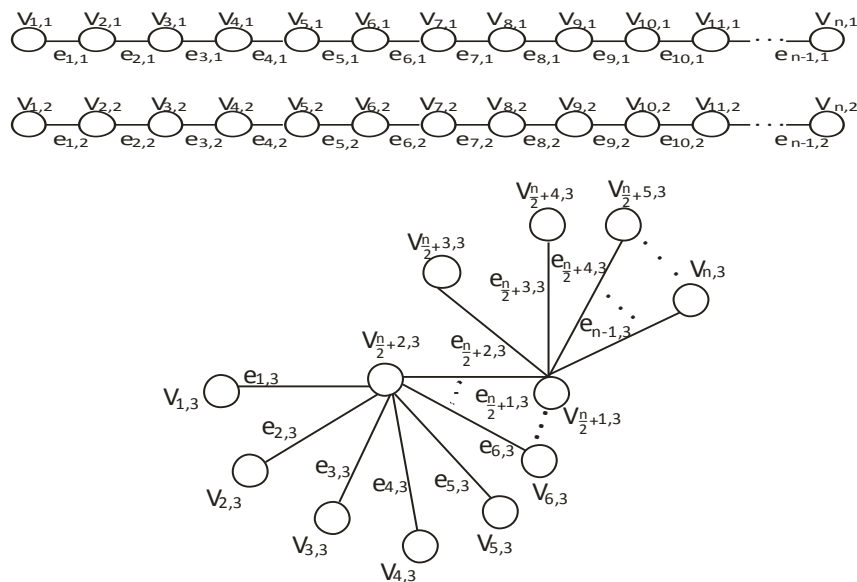
1. Memulai penelitian

2. Menotasikan titik dan sisi pada $2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ untuk $n \geq 4$ genap dan $2P_n \cup S_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2}}$ untuk $n \geq 5$ ganjil. Serta $P_n \cup 2S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ untuk $n \geq 4$ genap dan $P_n \cup 2S_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2}}$ untuk $n \geq 5$ ganjil.
3. Memberikan label untuk titik dan sisi pada $2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ untuk $n \geq 4$ genap dan $2P_n \cup S_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2}}$ untuk $n \geq 5$ ganjil. Serta $P_n \cup 2S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ untuk $n \geq 4$ genap dan $P_n \cup 2S_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2}}$ untuk $n \geq 5$ ganjil.
4. Membuat formula Pelabelan TSAAS pada $2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ untuk $n \geq 4$ genap dan $2P_n \cup S_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2}}$ untuk $n \geq 5$ ganjil. Serta $P_n \cup 2S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ untuk $n \geq 4$ genap dan $P_n \cup 2S_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2}}$ untuk $n \geq 5$ ganjil.
5. Membangkitkan konstanta anti ajaib pada $2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ untuk $n \geq 4$ genap dan $2P_n \cup S_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2}}$ untuk $n \geq 5$ ganjil. Serta $P_n \cup 2S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ untuk $n \geq 4$ genap dan $P_n \cup 2S_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2}}$ untuk $n \geq 5$ ganjil.
6. Hasil
7. Selesai

III. Hasil dan Pembahasan

3.1. Pelabelan TSAAS Pada Graf $2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ untuk $n \geq 4$ genap

Graf $2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ untuk $n \geq 4$ genap, dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 1 : Penotasian Titik dan Sisi Graf $2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$

Berdasarkan gambar diatas, dapat dinotasikan graf $2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ dengan himpunan titik dan sisinya sebagai berikut :

$$V(2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}) = \{v_{i,j} \mid 1 \leq j \leq 3, 1 \leq i \leq n\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$E(2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}) = \{e_{i,j} \mid 1 \leq j \leq 3, 1 \leq i \leq n-1\}, \quad \dots\dots\dots (2)$$

dimana

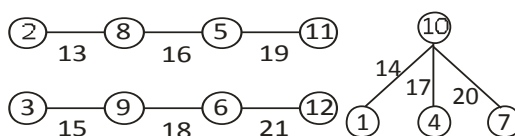
$$e_{i,1} = v_{i,1}v_{i+1,1}, 1 \leq i \leq n-1$$

$$e_{i,2} = v_{i,2}v_{i+1,2}, 1 \leq i \leq n-1$$

$$e_{i,3} = \begin{cases} v_{i,3}v_{\frac{n}{2}+2,2}, 1 \leq i \leq \frac{n}{2}+1 \\ v_{\frac{n}{2}+1,2}v_{i+1,2}, \frac{n}{2}+2 \leq i \leq n-1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3)$$

3.1.1. Untuk $n=4 \rightarrow 2P_4 \cup S_{3,1}$

Pelabelan TSAAS pada graf $2P_4 \cup S_{3,1}$, dapat dilakukan seperti pada gambar dibawah ini :



Gambar 2 : Pelabelan Titik dan Sisi Graf $2P_4 \cup S_{3,1}$

Perhatikan bahwa titik diberi label dengan anggota himpunan $\lambda(V) = \{1, 2, \dots, 12\}$ dan banyaknya titik $n=4$. Jika λ adalah pelabelan TSAAS untuk graf $2P_4 \cup S_{3,1}$ maka diperoleh :

$\lambda(v_{1,1}) = 2$	$\lambda(v_{1,2}) = 3$	$\lambda(v_{1,3}) = 1$
$\lambda(v_{2,1}) = 8$	$\lambda(v_{2,2}) = 9$	$\lambda(v_{2,3}) = 2$
$\lambda(v_{3,1}) = 5$	$\lambda(v_{3,2}) = 6$	$\lambda(v_{3,3}) = 7$
$\lambda(v_{4,1}) = 11$	$\lambda(v_{4,2}) = 12$	$\lambda(v_{4,3}) = 10$
$\lambda(e_{1,1}) = 13$	$\lambda(e_{1,2}) = 15$	$\lambda(e_{1,3}) = 14$
$\lambda(e_{2,1}) = 16$	$\lambda(e_{2,2}) = 18$	$\lambda(e_{2,3}) = 17$
$\lambda(e_{3,1}) = 19$	$\lambda(e_{3,2}) = 21$	$\lambda(e_{3,3}) = 20 \quad \dots\dots\dots (4)$

Setelah diberikan label pada masing-masing titik dan sisi kemudian menjumlahkan semua label titik dan sisi, maka diperoleh :

- Untuk graf pertama

$$\lambda(v_{1,1}) + \lambda(e_{1,1}) + \lambda(v_{2,1}) = 2 + 13 + 8 = 23$$

$$\lambda(v_{2,1}) + \lambda(e_{2,1}) + \lambda(v_{3,1}) = 8 + 16 + 5 = 29$$

$$\lambda(v_{3,1}) + \lambda(e_{3,1}) + \lambda(v_{4,1}) = 5 + 19 + 11 = 35$$
- Untuk graf kedua

$$\lambda(v_{1,2}) + \lambda(e_{1,2}) + \lambda(v_{2,2}) = 3 + 15 + 9 = 27$$

$$\lambda(v_{2,2}) + \lambda(e_{2,2}) + \lambda(v_{3,2}) = 9 + 18 + 6 = 33$$

$$\lambda(v_{3,2}) + \lambda(e_{3,2}) + \lambda(v_{4,2}) = 6 + 21 + 12 = 27$$

3. Untuk graf ketiga

$$\lambda(v_{1,3}) + \lambda(e_{1,3}) + \lambda(v_{4,3}) = 1 + 14 + 10 = 25$$

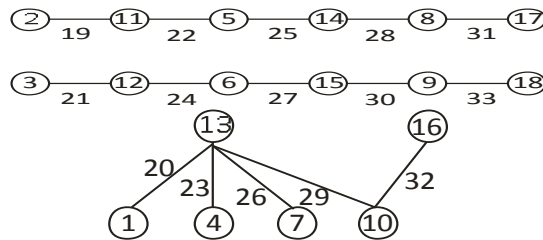
$$\lambda(v_{2,3}) + \lambda(e_{2,3}) + \lambda(v_{4,3}) = 4 + 17 + 10 = 31$$

$$\lambda(v_{3,3}) + \lambda(e_{3,3}) + \lambda(v_{4,3}) = 7 + 20 + 10 = 37$$

Dari penjumlahan semua label titik dan sisi pada graf $2P_4 \cup S_{3,1}$ diatas maka diperoleh suatu W atau himpunan bobot total sisi yang beda dua pada setiap sisinya yaitu $W = \{23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37\}$. Jadi, $2P_4 \cup S_{3,1}$ adalah (23,2)-TSAAS.

3.1.2. Untuk $n = 6 \rightarrow 2P_6 \cup S_{4,2}$

Pelabelan TSAAS pada graf $2P_6 \cup S_{4,2}$, dapat dilakukan seperti pada gambar dibawah ini :



Gambar 3 : Pelabelan Titik dan Sisi Graf $2P_6 \cup S_{4,2}$

Perhatikan bahwa titik diberi label dengan anggota himpunan $\lambda(V) = \{1, 2, \dots, 18\}$ dan banyaknya titik $n=6$. Jika λ adalah pelabelan TSAAS untuk graf $2P_6 \cup S_{4,2}$ maka diperoleh :

$\lambda(v_{1,1}) = 2$	$\lambda(v_{1,2}) = 3$	$\lambda(v_{1,3}) = 1$
$\lambda(v_{2,1}) = 11$	$\lambda(v_{2,2}) = 12$	$\lambda(v_{2,3}) = 4$
$\lambda(v_{3,1}) = 5$	$\lambda(v_{3,2}) = 6$	$\lambda(v_{3,3}) = 7$
$\lambda(v_{4,1}) = 14$	$\lambda(v_{4,2}) = 15$	$\lambda(v_{4,3}) = 10$
$\lambda(v_{5,1}) = 8$	$\lambda(v_{5,2}) = 9$	$\lambda(v_{5,3}) = 13$
$\lambda(v_{6,1}) = 17$	$\lambda(v_{6,2}) = 18$	$\lambda(v_{6,3}) = 16$
$\lambda(e_{1,1}) = 19$	$\lambda(e_{1,2}) = 21$	$\lambda(e_{1,3}) = 20$
$\lambda(e_{2,1}) = 22$	$\lambda(e_{2,2}) = 24$	$\lambda(e_{2,3}) = 23$
$\lambda(e_{3,1}) = 25$	$\lambda(e_{3,2}) = 27$	$\lambda(e_{3,3}) = 26$
$\lambda(e_{4,1}) = 28$	$\lambda(e_{4,2}) = 30$	$\lambda(e_{4,3}) = 29$
$\lambda(e_{5,1}) = 31$	$\lambda(e_{5,2}) = 33$	$\lambda(e_{5,3}) = 32$

Setelah diberikan label pada masing-masing titik dan sisi kemudian menjumlahkan semua label titik dan sisi, maka diperoleh :

1. Untuk graf pertama

$$\lambda(v_{1,1}) + \lambda(e_{1,1}) + \lambda(v_{2,1}) = 2 + 19 + 11 = 32$$

$$\lambda(v_{2,1}) + \lambda(e_{2,1}) + \lambda(v_{3,1}) = 11 + 22 + 5 = 38$$

$$\lambda(v_{3,1}) + \lambda(e_{3,1}) + \lambda(v_{4,1}) = 5 + 25 + 14 = 44$$

$$\lambda(v_{4,1}) + \lambda(e_{4,1}) + \lambda(v_{5,1}) = 14 + 28 + 8 = 50$$

$$\lambda(v_{5,1}) + \lambda(e_{5,1}) + \lambda(v_{6,1}) = 8 + 31 + 17 = 56$$

2. Untuk graf kedua

$$\lambda(v_{1,2}) + \lambda(e_{1,2}) + \lambda(v_{2,2}) = 3 + 21 + 12 = 36$$

$$\lambda(v_{2,2}) + \lambda(e_{2,2}) + \lambda(v_{3,2}) = 12 + 24 + 6 = 42$$

$$\lambda(v_{3,2}) + \lambda(e_{3,2}) + \lambda(v_{4,2}) = 6 + 27 + 15 = 48$$

$$\lambda(v_{4,2}) + \lambda(e_{4,2}) + \lambda(v_{5,2}) = 15 + 30 + 9 = 54$$

$$\lambda(v_{5,2}) + \lambda(e_{5,2}) + \lambda(v_{6,2}) = 9 + 33 + 18 = 60$$

3. Untuk graf ketiga

$$\lambda(v_{1,3}) + \lambda(e_{1,3}) + \lambda(v_{5,3}) = 1 + 20 + 13 = 34$$

$$\lambda(v_{2,3}) + \lambda(e_{2,3}) + \lambda(v_{5,3}) = 4 + 23 + 13 = 40$$

$$\lambda(v_{3,3}) + \lambda(e_{3,3}) + \lambda(v_{5,3}) = 7 + 26 + 13 = 46$$

$$\lambda(v_{4,3}) + \lambda(e_{4,3}) + \lambda(v_{5,3}) = 10 + 29 + 13 = 52$$

$$\lambda(v_{5,3}) + \lambda(e_{5,3}) + \lambda(v_{6,3}) = 16 + 32 + 10 = 58$$

Dari penjumlahan semua label titik dan sisi pada graf $2P_6 \cup S_{4,2}$ diatas maka diperoleh suatu W atau himpunan bobot total sisi yang beda dua pada setiap sisinya yaitu $W = \{32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60\}$. Jadi, $2P_6 \cup S_{4,2}$ adalah $(32,2)$ -TSAAS. Berdasarkan beberapa contoh kasus dengan n kecil di atas, maka diperoleh hasil secara umum, untuk graf $2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ untuk $n \geq 4$ genap dalam teorema berikut ini:

Teorema 1 :

Graf $2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ adalah $(\frac{9n}{2} + 5, 2)$ -TSAAS untuk $n \geq 4$ genap.

Bukti :

Pandang notasi titik dan sisi pada graf $2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ dalam persamaan (1). Berikan label pada titik dan sisinya dengan cara :

$$\lambda(v_{i,j}) = \begin{cases} \frac{3i-1}{2} + 1, j = 1, 1 \leq i \leq n-1; i \text{ ganjil} \\ \frac{3n+3i}{2} - 1, j = 1, 1 \leq i \leq n; i \text{ genap} \\ \frac{3i-1}{2} + 2, j = 2, 1 \leq i \leq n-1; i \text{ ganjil} \\ \frac{3n+3i}{2}, j = 2, 1 \leq i \leq n; i \text{ genap} \end{cases} \dots\dots\dots (5)$$

$$\lambda(e_{i,j}) = \begin{cases} 3i-2, j = 3, 1 \leq i \leq n \\ 3n+3i-2, j = 1, 1 \leq i \leq n-1 \\ 3n+3i, j = 2, 1 \leq i \leq n-1 \\ 3n+3i-1, j = 3, 1 \leq i \leq n-1 \end{cases} \dots\dots\dots (6)$$

dengan label tersebut diperoleh :

$$a_i = \begin{cases} \lambda(v_{i,j}) + \lambda(e_{i,j}) + \lambda(v_{i,j+i,j}), 1 \leq j \leq 2, 1 \leq i \leq n-1 \\ \lambda(v_{i,3}) + \lambda(e_{i,3}) + \lambda(v_{\frac{n}{2}+2,3}), 1 \leq i \leq \frac{n}{2} + 1 \\ \lambda(v_{\frac{n}{2}+1,3}) + \lambda(v_{i,3}) + \lambda(v_{i+1,3}), \frac{n}{2} + 2 \leq i \leq n-1 \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

$$a_i = \begin{cases} \frac{3i-1}{2} + 1 + 3n + 3i - 2 + \frac{3n+3i}{2} - 1 = \frac{9n-2}{2} + 6i \\ \frac{3i-1}{2} + 2 + 3n + 3i + \frac{3n+3(i+1)}{2} - \frac{9n}{2} + 6i + 3 \\ 3i - 2 + 3n + 3i - 1 + 3(\frac{n}{2} + 2) - 2 = \frac{9n}{2} + 6i + 1 \\ 3(\frac{n}{2} + 1) - 2 + 3n + 3i - 1 + 3(i+1) - 2 = \frac{9n}{2} + 6i + 1 \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

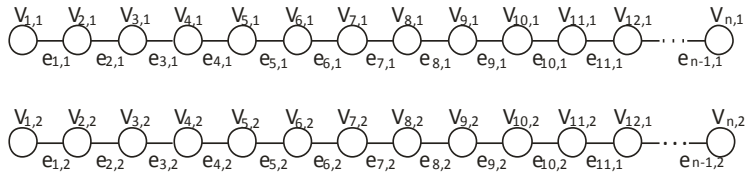
$$W = \{a, a+1, a+2, \dots, a+q-1\} \dots\dots\dots (9)$$

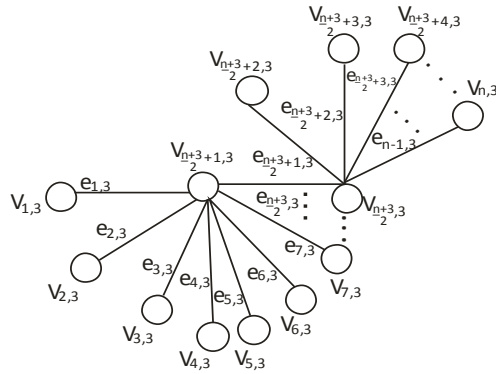
$$W = \begin{cases} \frac{9n-2}{2} + 6i \mid 1 \leq i \leq n \\ \frac{9n}{2} + 6i + 3 \mid 1 \leq i \leq n \\ \frac{9n}{2} + 6i + 1 \mid 1 \leq i \leq n \end{cases} \dots\dots\dots (10)$$

Jadi $W = \{\frac{9n}{2} + 5, \frac{9n}{2} + 7, \frac{9n}{2} + 9, \dots, \frac{9n}{2} + n\}$, dengan demikian untuk $n \geq 4$ genap dengan graf $2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ mempunyai pelabelan $(\frac{9n}{2} + 5, 2)$ -TSAAS.

3.2. Pelabelan TSAAS Pada Graf $2P_n \cup S_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2}}$ untuk $n \geq 5$ ganjil

Graf $2P_n \cup S_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2}}$ untuk $n \geq 5$ ganjil, dapat digambarkan sebagai berikut :





Gambar 4 : Penotasian Titik dan Sisi Graf $2P_n \cup S_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2}}$

Berdasarkan gambar diatas, dapat dinotasikan graf $2P_n \cup S_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2}}$ dengan himpunan titik dan sisinya sebagai berikut :

$$V(2P_n \cup S_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2}}) = \{v_{i,j} \mid 1 \leq j \leq 3, 1 \leq i \leq n\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$E(2P_n \cup S_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2}}) = \{e_{i,j} \mid 1 \leq j \leq 3, 1 \leq i \leq n-1\}, \quad \dots\dots\dots (12)$$

dimana

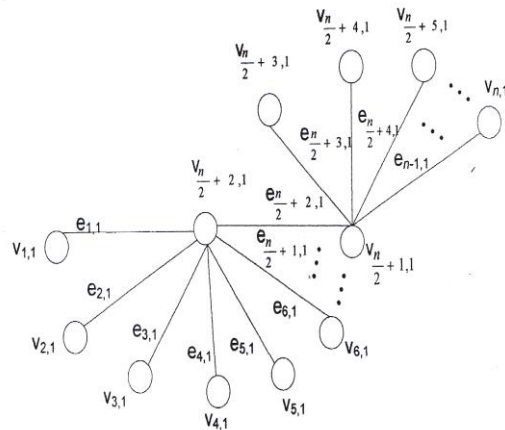
$$e_{i,1} = v_{i,1}v_{i+1,1}, 1 \leq i \leq n-1$$

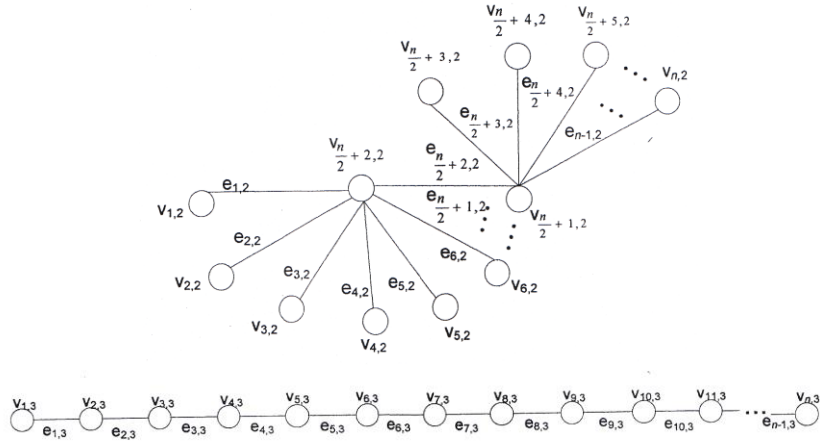
$$e_{i,2} = v_{i,2}v_{i+1,2}, 1 \leq i \leq n-1$$

$$e_{i,3} = \begin{cases} v_{i,3}v_{\frac{n+3}{2}+1,3}, 1 \leq i \leq \frac{n}{2}+1 \\ v_{\frac{n+3}{2},3}v_{i+1,3}, \frac{n+3}{2}+1 \leq i \leq n-1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (13)$$

3.3. Pelabelan TSAAS Pada Graf $P_n \cup 2S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ untuk $n \geq 4$ genap

Graf $P_n \cup 2S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ untuk $n \geq 4$ genap, dapat digambarkan sebagai berikut:





Gambar 5 : Penotasian Titik dan Sisi Graf $P_n \cup 2S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$

Berdasarkan gambar diatas, dapat di notasikan graf $P_n \cup 2S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ dengan himpunan titik dan sisinya sebagai berikut :

$$V(P_n \cup 2S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}) = \{v_{i,j} \mid 1 \leq j \leq 3, 1 \leq i \leq n\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$E(P_n \cup 2S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}) = \{e_{i,j} \mid 1 \leq j \leq 3, 1 \leq i \leq n-1\}, \quad \dots\dots\dots (15)$$

dimana

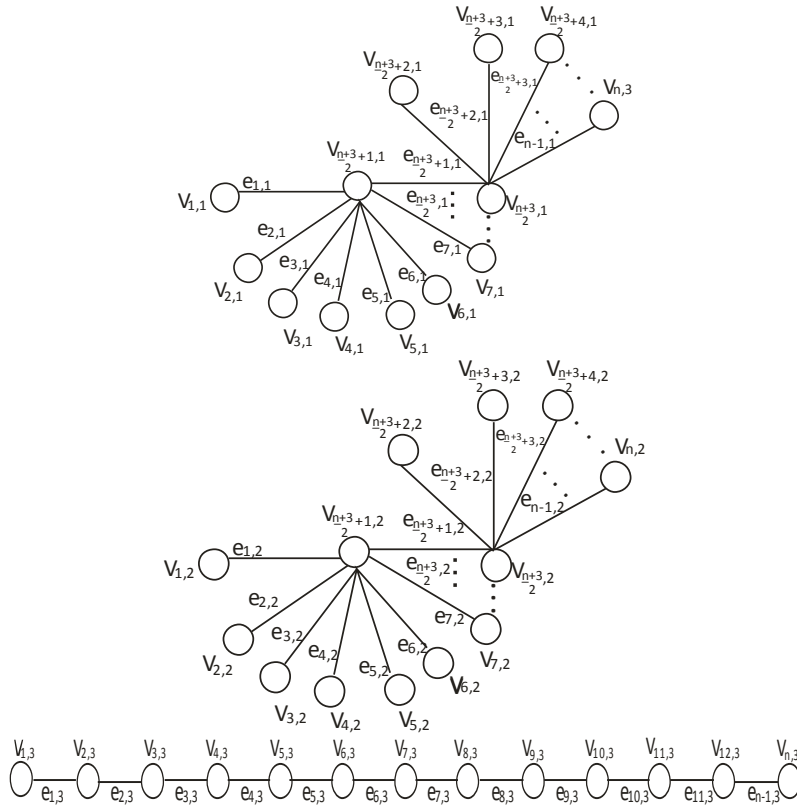
$$e_{i,1} = \begin{cases} v_{i,1} v_{\frac{n}{2}+2,1}, 1 \leq i \leq \frac{n}{2} + 1 \\ v_{\frac{n}{2}+1,1} v_{i+1,1}, \frac{n}{2} + 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$e_{i,2} = \begin{cases} v_{i,2} v_{\frac{n}{2}+2,2}, 1 \leq i \leq \frac{n}{2} + 1 \\ v_{\frac{n}{2}+1,2} v_{i+1,2}, \frac{n}{2} + 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$e_{i,3} = v_{i,3} v_{i+1,3}, 1 \leq i \leq n-1 \quad \dots\dots\dots (16)$$

3.4. Pelabelan TSAAS Pada Graf $P_n \cup 2S_{\frac{n+3}{2}+1, \frac{n-3}{2}}$ untuk $n \geq 5$ ganjil

Graf $P_n \cup 2S_{\frac{n+3}{2}+1, \frac{n-3}{2}}$ untuk $n \geq 5$ ganjil, dapat dilihat pada Gambar 6.



Gambar 6 : Penotasian Titik dan Sisi Graf $P_n \cup 2S_{\frac{n+3}{2}+1, \frac{n-3}{2}}$

Berdasarkan gambar diatas, dapat dinotasikan graf $P_n \cup 2S_{\frac{n+3}{2}+1, \frac{n-3}{2}}$ dengan himpunan titik dan sisi sebagai berikut :

$$V(P_n \cup 2S_{\frac{n+3}{2}+1, \frac{n-3}{2}}) = \{v_{i,j} \mid 1 \leq j \leq 3, 1 \leq i \leq n\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$E(P_n \cup 2S_{\frac{n+3}{2}+1, \frac{n-3}{2}}) = \{e_{i,j} \mid 1 \leq j \leq 3, 1 \leq i \leq n-1\}, \quad \dots\dots\dots (18)$$

dimana

$$e_{i,1} = \begin{cases} v_{i,1} v_{\frac{n+3}{2}+1,1}, 1 \leq i \leq \frac{n+3}{2} \\ v_{\frac{n+3}{2},1} v_{i+1,1}, \frac{n+3}{2} + 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$e_{i,2} = \begin{cases} v_{i,2} v_{\frac{n+3}{2}+1,2}, 1 \leq i \leq \frac{n+3}{2} \\ v_{\frac{n+3}{2},2} v_{i+1,2}, \frac{n+3}{2} + 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$e_{i,3} = v_{i,3} v_{i+1,3}, 1 \leq i \leq n-1 \quad \dots\dots\dots (19)$$

IV. Penutup

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Graf $2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ adalah TSAAS dengan $(a,d) = (\frac{9n}{2} + 5, 2)$ untuk $n \geq 4$ genap. Serta label titik dan sisinya, yaitu :

$$\lambda(v_{i,j}) = \begin{cases} \frac{3i-1}{2} + 1, j = 1, 1 \leq i \leq n-1; i \text{ ganjil} \\ \frac{3n+3i}{2} - 1, j = 1, 1 \leq i \leq n; i \text{ genap} \\ \frac{3i-1}{2} + 2, j = 2, 1 \leq i \leq n-1; i \text{ ganjil} \\ \frac{3n+3i}{2}, j = 2, 1 \leq i \leq n; i \text{ genap} \end{cases}$$

$$\lambda(e_{i,j}) = \begin{cases} 3i-2, j = 3, 1 \leq i \leq n \\ 3n+3i-2, j = 1, 1 \leq i \leq n-1 \\ 3n+3i, j = 2, 1 \leq i \leq n-1 \\ 3n+3i-1, j = 3, 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

2. Graf $2P_n \cup S_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-3}{2}}$ adalah TSAAS dengan $(a,d) = (\frac{9n+3}{2} + 5, 2)$ untuk $n \geq 5$ ganjil. Serta label titik dan sisinya, yaitu :

$$\lambda(v_{i,j}) = \begin{cases} \frac{3i-1}{2} + 1, j = 1, 1 \leq i \leq n; i \text{ ganjil} \\ \frac{3n+3i+1}{2}, j = 1, 1 \leq i \leq n-1; i \text{ genap} \\ \frac{3i-1}{2} + 2, j = 2, 1 \leq i \leq n; i \text{ ganjil} \\ \frac{3n+3i+1}{2} + 1, j = 2, 1 \leq i \leq n-1; i \text{ genap} \end{cases}$$

$$\lambda(e_{i,j}) = \begin{cases} 3i-2, j = 3, 1 \leq i \leq n \\ 3n+3i-2, j = 1, 1 \leq i \leq n-1 \\ 3n+3i, j = 2, 1 \leq i \leq n-1 \\ 3n+3i-1, j = 3, 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

3. Graf $2P_n \cup S_{\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}-1}$ adalah TSAAS dengan $(a,d) = (\frac{9n}{2} + 6, 2)$ untuk $n \geq 4$ genap. Serta label titik dan sisinya yaitu :

$$\begin{aligned}
\lambda(v_{i,j}) &= \begin{cases} 3i - 2, & j = 1, 1 \leq i \leq n \\ 3i - 1, & j = 2, 1 \leq i \leq n \\ \frac{3i - 1}{2} + 2, & j = 3, 1 \leq i \leq n - 1; i \text{ ganjil} \\ \frac{3n + 3i}{2}, & j = 3, 1 \leq i \leq n; i \text{ genap} \end{cases} \\
\lambda(e_{i,j}) &= \begin{cases} 3n + 3i - 2, & j = 1, 1 \leq i \leq n - 1 \\ 3n + 3i, & j = 2, 1 \leq i \leq n - 1 \\ 3n + 3i - 1, & j = 3, 1 \leq i \leq n - 1 \end{cases} \\
4. \text{ Graf } P_n \cup 2S_{\frac{n+3}{2}+1, \frac{n-3}{2}} &\text{ adalah TSAAS dengan } (a,d) = \left(\frac{9n+3}{2} + 6, 2\right) \text{ untuk } n \geq 5 \text{ ganjil.} \\
\lambda(v_{i,j}) &= \begin{cases} 3i - 2, & j = 1, 1 \leq i \leq n \\ 3i - 1, & j = 2, 1 \leq i \leq n \\ \frac{3i - 1}{2} + 2, & j = 3, 1 \leq i \leq n - 1; i \text{ ganjil} \\ \frac{3n + 3i + 1}{2} + 1, & j = 3, 1 \leq i \leq n; i \text{ genap} \end{cases} \\
\lambda(e_{i,j}) &= \begin{cases} 3n + 3i - 2, & j = 1, 1 \leq i \leq n - 1 \\ 3n + 3i, & j = 2, 1 \leq i \leq n - 1 \\ 3n + 3i - 1, & j = 3, 1 \leq i \leq n - 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

4.2. Saran

Bagi mahasiswa yang berminat dengan penelitian ini, dapat melakukan penelitian mengenai pelabelan TSAAS pada jenis graf yang lain.

Daftar Pustaka

- [1]. Gallian, J. A., 2011, A *Dynamic Survey of Graph Labelling*, ElectronicJournal of Combinatorics, Vol. 18, (<http://www.emis.ams.org/journal/EJC/Surveys/ds6.pdf>), diakses 14 Desember 2011.
- [2]. Sri Mei Itasari, *Pelabelan Total (a,d) C₄ anti ajaib super pada graf prisma C_n x P₂*. pdf, diakses 19 Desember 2011.